

Ссылка на статью:

// Математика и Математическое
моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2015. № 05. С. 83–96.

DOI: **10.7463/mathm.0515.0812348**

Представлена в редакцию: 10.09.2015

Исправлена: 24.09.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 539.37

Математическое моделирование контактных задач теории упругости с непрерывным односторонним контактом

Станкевич И. В.^{1,*}

[*aplmax@yandex.ru](mailto:aplmax@yandex.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В работе рассматривается алгоритм построения численного решения задачи теории упругости применительно к телу, которое имеет выраженный односторонний непрерывный контакт с абсолютно упругим полупространством в пределах фиксированной поверхности. Особенностью алгоритма является процедура коррекции касательных сил на контактной поверхности, позволяющая добиться достаточно точного выполнения принятого закона трения при скольжении тела по ограничивающей поверхности полупространства. В случае прилипания на контактной поверхности тела задаются кинематические условия. Алгоритм строится в рамках конечно-элементной технологии.

Ключевые слова: дискретное контактное взаимодействие; контактная задача теории упругости; метод конечных элементов

Введение

В работе [1] приведена постановка и численное решение задачи одностороннего дискретного контактного взаимодействия упругого тела и абсолютно жесткого полупространства. Однако многие детали и узлы машиностроительных конструкций имеют выраженный непрерывный контакт в пределах некоторой заданной поверхности [2, 3]. В данной работе рассматривается частный случай такого варианта контактного взаимодействия, когда нагруженное внешними силами упругое тело конечных размеров опирается на абсолютно жесткое полупространство. Контакт происходит по выделенной контактной поверхности, которая в общем случае может менять свои размеры.

Разработанный для решения этой задачи численный алгоритм является дальнейшей адаптацией и развитием подходов, изложенных в работе [1]. Представлены результаты решения модельной задачи теории упругости без учета и с учетом трения. В последнем случае дополнительно были получены численные данные, характеризующие сходимость решения.

1. Постановка задачи теории упругости с односторонним непрерывным контактом

Рассмотрим в двумерном пространстве \mathbb{R}^2 с декартовой системой координат Ox_1x_2 тело, занимающее область G , ограниченную кусочно-гладкой границей ∂G (рис.1). Математическая формулировка квазистатической задачи теории упругости включает следующие соотношения:

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) + Q_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (1)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{S_1} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1 \subset \partial G, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j|_{S_2} = p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2 \subset \partial G \quad (3)$$

соотношения Коши для компонент тензора деформации

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (4)$$

и определяющие уравнения (в данном случае закон Гука) для компонент тензора напряжений $\tilde{\sigma}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (5)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор перемещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$, здесь и далее $i = \overline{1,2}$; $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ – заданный вектор перемещения точки, расположенной на поверхности S_1 ; $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ – вектор массовых сил; $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ – вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности S_2 ; ε_{kl}^e – компоненты тензора упругой деформации; ε_{kl}^0 – компоненты тензора начальной деформации (для термоупругого тела таковыми являются температурные деформации); C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости.

При решении данной задачи на контактной поверхности S_k тела дополнительно должны быть выполнены два условия, характеризующие особенность контактного взаимодействия с ограничивающей поверхностью полупространства. Для этого зададим на поверхности S_k внешнюю относительно области G нормаль \mathbf{n} и касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 1). Тогда условия контактного взаимодействия можно записать в виде следующих двух соотношений:

кинематическое условие

$$u_n \leq \delta_n, \quad (6)$$

силовое условие

$$\sigma_n \leq 0, \quad (7)$$

где u_n – перемещение точки контактной поверхности S_k в направлении внешней нормали \mathbf{n} ; δ_n – начальное расстояние (зазор) по нормали \mathbf{n} между точкой контактной поверхности S_k и некоторой сходственной точкой, расположенной на ограничивающей поверхности полупространства, (здесь $\delta_n \geq 0$); $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ – проекция вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на нормаль \mathbf{n} . Необходимо отметить, что в точках нарушения контакта $\sigma_n = 0$.

При отсутствии трения касательные напряжения на контактной поверхности S_k равны нулю, т.е. имеем: $\sigma_\tau = 0$, где $\sigma_\tau = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор к контактной поверхности S_k , рис. 1). Многие прикладные задачи требуют учета сил трения на контактных поверхностях [2, 3]. В данной работе трение учитывалось в рамках закона **Амонтона-Кулона** [5–10]. Модуль касательного напряжения σ_τ в точках контактной поверхности вычислялся по формуле

$$|\sigma_\tau| = \mu |\sigma_n|, \quad (8)$$

если имело место скольжение точки контактной поверхности S_k по ограничивающей поверхности полупространства, здесь μ – коэффициент трения (трения скольжения). А в том случае, когда наблюдается прилипание точки контактной поверхности S_k к ограничивающей поверхности полупространства, должно выполняться строгое неравенство

$$|\sigma_\tau| < \mu |\sigma_n|, \quad (9)$$

Совокупность соотношений (1) – (9) составляет математическую формулировку задачи теории упругости с непрерывным односторонним контактом.

2. Алгоритм численного решения контактной задачи теории упругости с односторонним непрерывным контактом

Процесс решения имеет итерационный характер и реализуются следующим образом. Исходная задача рассматривается как задача теории упругости, при этом на контактной поверхности S_k задаются кинематические (по нормали \mathbf{n}) и силовые (по касательной $\boldsymbol{\tau}$) условия. Если силовые условия отсутствуют, то данная задача становится стандартной задачей теории упругости (см. рис. 1, а). Силовые условия необходимо учитывать в том случае, когда задача решается с учетом трения (см. рис. 1, б). Так как рассматривается односторонний контакт, то кинематические условия заранее известны, например, $u_n|_{S_k} = 0$ (см. рис. 1), а силовые условия на контактной поверхности S_k корректируются после выполнения очередной итерации так, чтобы обеспечить выполнение принятого закона трения, и учитываются при проведении следующей итерации.

Для численного решения сформулированной задачи был использован метод конечных элементов (МКЭ) [4]. После минимизации функционала полной потенциальной энер-

гии линейно упругого тела, размещённого в пространстве \mathbb{R}^2 и нагруженного массовыми $Q(x)$ и поверхностными $p(x)$, получается матричное уравнение (глобальная система линейных алгебраических уравнений), имеющее вид [4],

$$[K] \{U\} = \{R\}, \quad (10)$$

здесь $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{R\}$ – глобальный вектор нагрузки, $\{U\}$ – глобальный вектор перемещений, состоящий из перемещений всех узлов конечно-элементной модели (см. рис. 2). При решении системы (10) не обходимо учесть кинематические граничные условия (2), а также дополнительные кинематические условия на поверхности S_k , например, закрепление по нормали n . В данной работе был использован метод сопряженных градиентов, что позволило учесть указанные условия непосредственно при реализации процедур метода сопряженных градиентов, не перестраивая для этого матрицу жесткости $[K]$ и вектор нагрузки $\{R\}$.

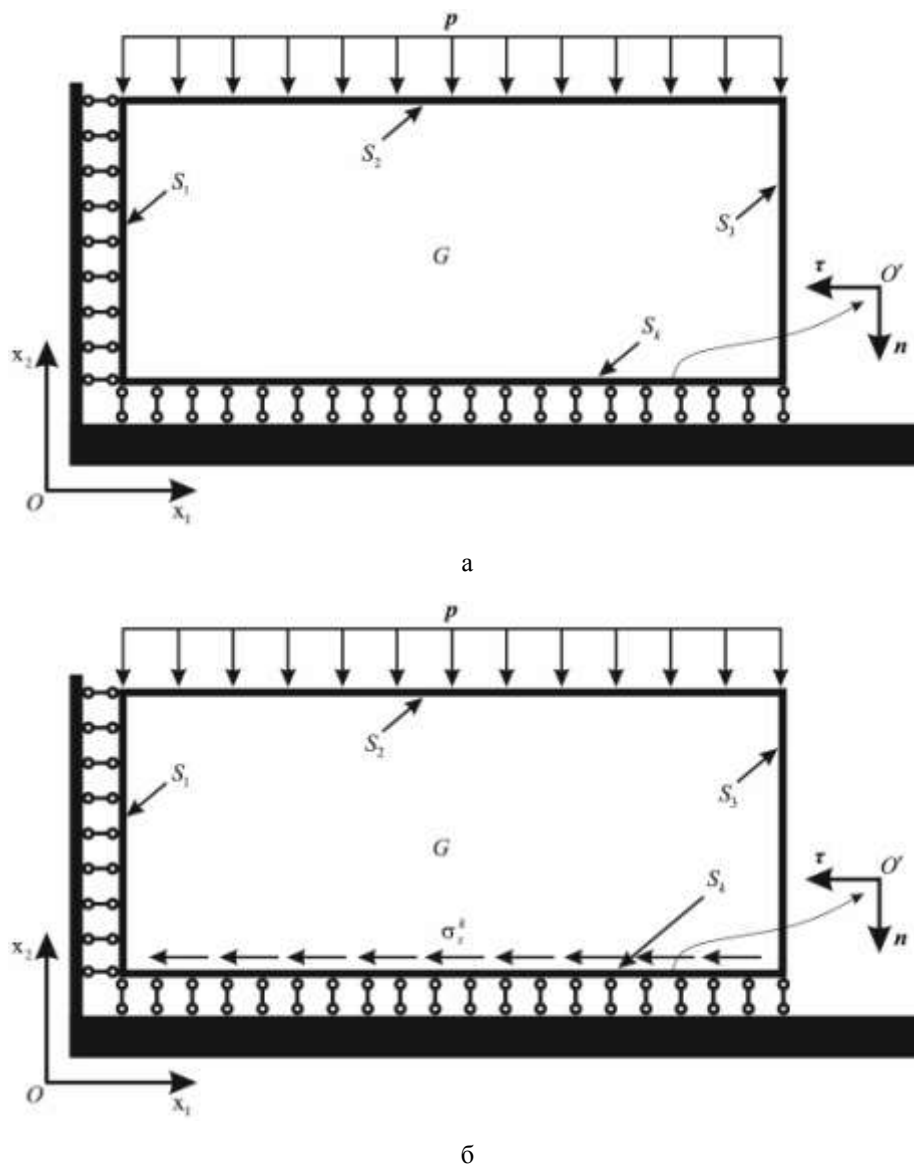


Рис. 1. Схема одностороннего непрерывного контактного взаимодействия: а – без учета трения; б – с учетом трения

Для учета касательных сил, возникающих на поверхности контакта из-за трения, необходимо на каждой итерации вносить коррекцию в глобальный вектор нагрузки $\{R\}$ [1, 5, 6, 7]. Алгоритм коррекции касательных сил реализуется следующим образом. На первом шаге выполняется решение обычной упругой задачи без учета трения, то есть все узлы конечных элементов, расположенные на контактной поверхности S_k имели возможность при деформировании свободно перемещаться вдоль ограничивающей поверхности полупространства. Пусть u_τ^m и u_n^m соответственно являются касательной и нормальной компонентами вектора перемещения u^m некоторого контактного узла A_m ($m = \overline{1, M}$) конечно-элементной модели, принадлежащего поверхности контакта S_k ; здесь M – число узлов конечно-элементной модели, принадлежащих поверхности контакта S_k . После вычисления касательного перемещения u_τ^m , нормальной σ_n^m и касательной σ_τ^m компонент вектора напряжений σ^m в контактных узлах A_m проверялось условие прилипания (9). Если устанавливалось, что $|\sigma_\tau^m| < \mu |\sigma_n^m|$, то на следующей итерации в рассматриваемом контактном узле A_m фиксировалось значение касательной компоненты $u_\tau^m = 0$ вектора перемещения u^m , т.е. было запрещено горизонтальное перемещение рассматриваемого контактного узла A_m . А в том случае, когда условие прилипания (9) не выполнялось, проводилась коррекция касательной компоненты узловой силы P_τ^m с помощью соотношения

$$P_\tau^{m(k+1)} = P_\tau^{m(k)} \pm \frac{\left| \sigma_\tau^{mR(k)} \right| - \left| \sigma_\tau^{mT(k)} \right|}{\max \left(\left| \sigma_\tau^{mR(k)} \right|, \left| \sigma_\tau^{mT(k)} \right| \right)} \Delta P_\tau^{m(k)}, \quad (11)$$

где $P_\tau^{m(k)}$ – значение касательной компоненты узловой силы P^m в контактном узле A_m , $m = \overline{1, M}$, после выполнения k -ой итерации; $\Delta P_\tau^{m(k)}$ – заданное приращение касательной компоненты узловой силы P^m в контактном узле A_m , например, $\Delta P_\tau^{m(k)} = \alpha \left| P_\tau^{m(k)} \right|$, где $0 < \alpha < 1$; $\left| \sigma_\tau^{mR(k)} \right|$ – модуль касательной компоненты вектора напряжений, вычисленной по результатам k -ой итерации, $\left| \sigma_\tau^{mT(k)} \right|$ – теоретическое значение модуля касательной компоненты вектора напряжений, здесь $\left| \sigma_\tau^{mT(k)} \right| = \mu \left| \sigma_n^{m(k)} \right|$, $\left| \sigma_n^{m(k)} \right|$ – модуль нормальной компоненты вектора напряжений, вычисленной по результатам k -ой итерации. Вычисленное значение касательной компоненты узловой силы $P_\tau^{m(k)}$ вносится в соответствующую ячейку глобального вектора нагрузки $\{R\}$.

В выражении (11) при выборе знака необходимо руководствоваться следующим:

если $P_\tau^{m(k)} > 0$ и $|\sigma_\tau^{mR(k)}| > |\sigma_\tau^{mT(k)}|$, то выбирается знак «-»; если $P_\tau^{m(k)} > 0$ и $|\sigma_\tau^{mT(k)}| - \delta < |\sigma_\tau^{mR(k)}| < |\sigma_\tau^{mT(k)}|$, то выбирается знак «+»; если $P_\tau^{m(k)} < 0$ и $|\sigma_\tau^{mR(k)}| > |\sigma_\tau^{mT(k)}|$, то выбирается знак «+»; если $P_\tau^{m(k)} < 0$ и $|\sigma_\tau^{mT(k)}| - \delta < |\sigma_\tau^{mR(k)}| < |\sigma_\tau^{mT(k)}|$, то выбирается знак «-».

Так как численно добиться точного выполнения равенства (8), учитывающего скольжения, не удастся, то вводится некоторый параметр δ , который позволяет организовать устойчивый численный итерационный процесс коррекции значений касательной компоненты узловой силы P_τ^m и в том случае, когда расчетные значения касательных напряжений σ_τ^{mR} в рассматриваемом контактном узле приближаются (по модулю) к теоретическим значениям σ_τ^{mT} снизу. В процессе выполнения итераций модуль разности значений касательных напряжений $\Delta\sigma_\tau^m = \left| \sigma_\tau^{mR(k)} - \sigma_\tau^{mT(k)} \right|$ стремится к нулю.

Таким образом, особенностью рассмотренного алгоритма является то, что в контактных узлах одновременно формируются кинематические граничные условия в направлении нормали \mathbf{n} и силовые граничные условия (если нет прилипания) в направлении касательной $\boldsymbol{\tau}$ к контактной поверхности S_k .

Процесс вычислений заканчивается после оценки сходимости результатов итерации, например, для этого может быть использовано соотношение

$$\delta_u^{(k+1)} = \max_{m=1, \overline{M}} \left\| \mathbf{u}^{m(k+1)} - \mathbf{u}^{m(k)} \right\| < \varepsilon_u, \quad (12)$$

где $\mathbf{u}^{m(k+1)}$ – вектор перемещения \mathbf{u}^m контактного узла A_m , $m = \overline{1, M}$, после выполнения $(k+1)$ -ой итерации; ε_u – требуемая точность по перемещениям контактных узлов.

3. Результаты численных исследований

В качестве примера рассмотрено плоское напряженное состояние пластинки, занимающей в двухмерном пространстве \mathbb{R}^2 с декартовой системой координат Ox_1x_2 область G с размерами в плане $0,11\text{м} \times 0,05\text{м}$ (см. рис. 1). Пластика выполнена из материала с модулем упругости $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $0,3$. Поверхность S_1 зафиксирована от горизонтальных перемещений ($u_1 = 0$), но вертикальные перемещения u_2 точек поверхности допустимы. На поверхности S_2 задана равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $p = 350$ МПа. На контактной поверхности S_k заданы условия не проникновения в полупространство, т.е. принято, что для всех узлов A_m $u_n^m = 0$, а специальных кинематических ограничений на касательные перемещения u_τ^m нет. Таким обра-

зом, пластинка в результате приложения внешней нагрузки p на поверхности S_2 испытывает сжатие по оси Ox_2 и растяжение по оси Ox_1 .

Данная задача без учета трения между контактной поверхностью S_k тела и ограничивающей поверхностью полупространства является задачей теории упругости для пластинки с заданными кинематическими граничными условиями (см. рис. 1, а).

Эта же задача была решена с учетом трения ($\mu = 0,05$). Решение имело итерационный характер и реализовывалось так, что в процессе итераций уточнялись значения касательных напряжений σ_τ^k , возникающих на контактной поверхности S_k , но при этом сохранялись условия не проникновения в полупространство, т.е. $u_n^m = 0$ (рис. 1, б).

Обе задачи были решены с использованием конечно-элементной технологии [4]. На рис. 2 показана конечно-элементная модель пластинки, состоящая из 480 простейших 3-х узловых конечных элементов с общим числом узлов 275. Число контактных узлов в конечно-элементной модели было равно 25.

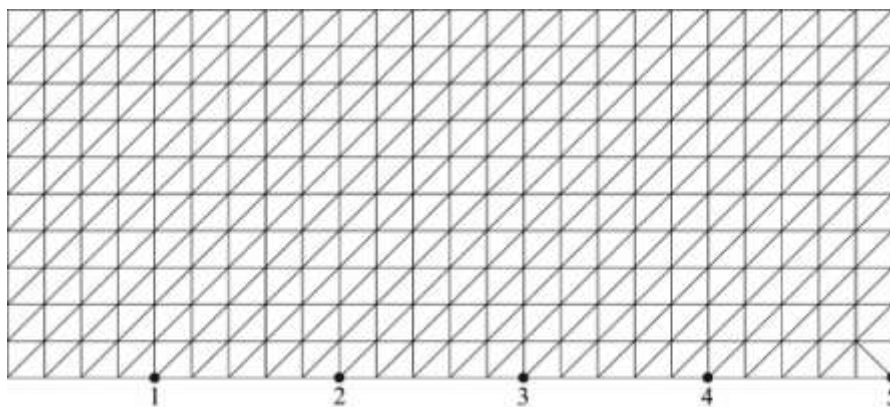


Рис. 2. Конечно-элементная модель пластинки

При решении данной задачи без учета трения вертикальное перемещение узлов, расположенных на поверхности S_2 , было максимальным по абсолютной величине и составило значение $u_2 = -0,875 \times 10^{-4}$ м. Максимальные горизонтальные перемещения имели узлы на поверхности S_3 : $u_1 = 0,630 \times 10^{-4}$ м. Напряженное состояние пластинки было полностью однородным: $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0,0$ МПа и $\sigma_{22} = -350,0$ МПа.

На рис. 3 показана конечно-элементная модель пластинки в деформированном состоянии с учетом трения (масштаб увеличен для наглядности).

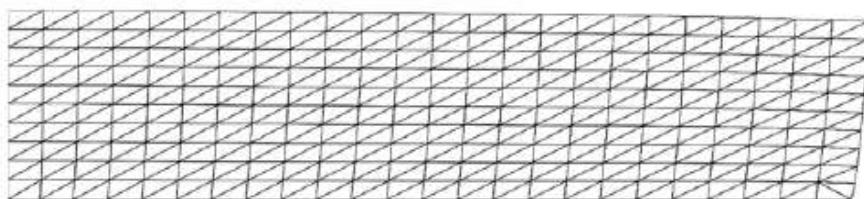


Рис. 3. Конечно-элементная модель пластинки в деформированном состоянии с учетом трения

На рис. 4 – 8 представлены поля компонент компонент тензора напряжений, вычисленные с учетом трения, и вектора перемещений, вычисленные без учета и с учетом трения.



Рис. 4. Поле компоненты тензора напряжений σ_{11} с учетом трения (МПа)



Рис. 5. Поле компоненты тензора напряжений σ_{22} с учетом трения (МПа)

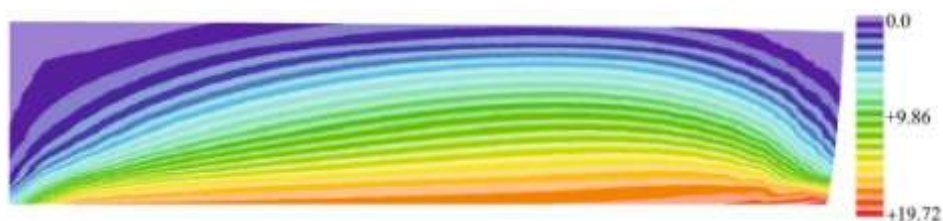


Рис. 6. Поле компоненты тензора напряжений σ_{12} с учетом трения (МПа)



а



б

Рис. 7. Поле компоненты вектора перемещений u_1 (м): а – без учета трения; б – с учетом трения

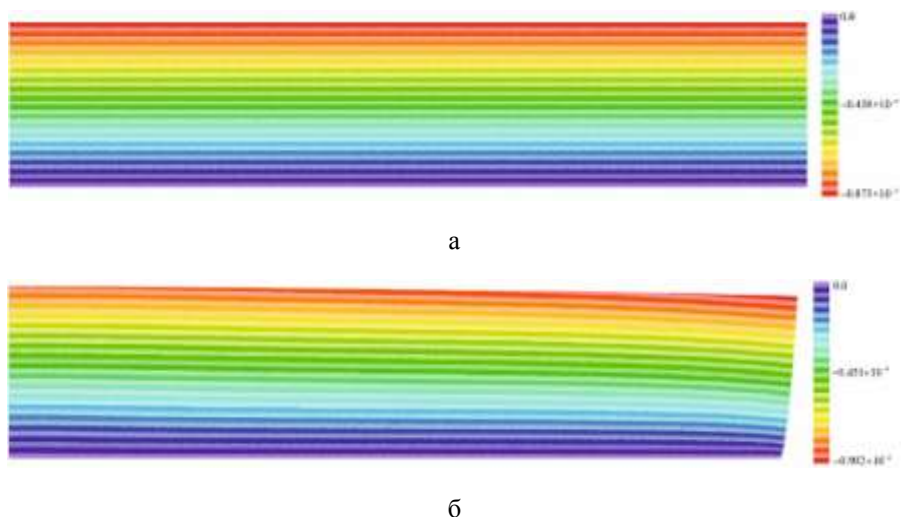


Рис. 8. Поле компоненты вектора перемещений u_2 (м): а – без учета трения; б – с учетом трения

Как и следовало ожидать, поле вектора перемещения, построенное для варианта расчета без учета трения, имеют выраженный однородный характер по сравнению с аналогичными полями, построенными на основании данных, полученных с учетом трения.

Заметное количественное различие можно обнаружить при сравнении результатов численных исследований (см. табл. 1) для отмеченных на рис. 2 контактных узлов, полученных при решении рассматриваемой задачи без учета трения (числитель) и с учетом трения (знаменатель).

Таблица 1. Результаты сравнительных численных исследований

Номер контактного узла	u , м	P_1 , МН	P_2 , МН	σ_{11} , МПа	σ_{22} , МПа	σ_{12} , МПа
1	0.10500e-04	0,0	1.750	0,0	-350,00	0,0
	0.3021167e-05	-0.10	1.71	-47.69	-342.56	17.13
2	0.23625e-04	0,0	1.750	0,0	-350,000	0,0
	0.1111654e-04	-0.09	1.73	-31.55	-346.05	17.30
3	0.36750e-04	0,0	1.750	0,0	-350,00	0,0
	0.2081970E-04	-0.09	1.74	-22.21	-348.40	17.42
4	0.49875e-04	0,0	1.75	0,0	-350,00	0,0
	0.3159375e-04	-0.09	1.77	-16.22	-354.18	17.71
5	0.63000E-04	0,0	0.88	0,0	-350,00	0,0
	0.4282310e-04	-0.15	1.06	-25.94	-394.39	19.72

На рис. 9 представлены зависимости, характеризующие процесс сходимости при решении задачи теории упругости с непрерывным односторонним контактом с учетом трения. Цифрами обозначены номера контактных узлов (см. рис. 2).

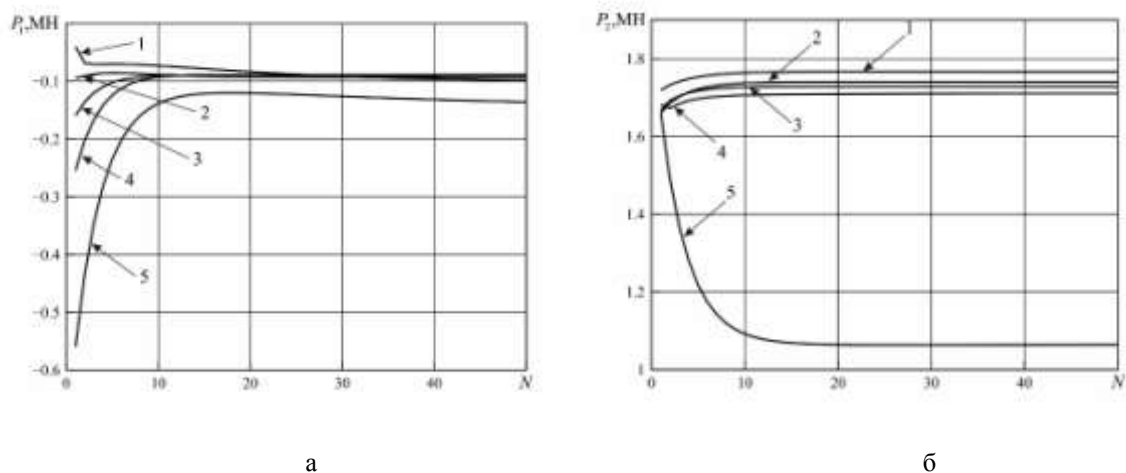


Рис. 9. Изменения значений компонент вектора узловых сил \mathbf{P} контактных узлов в зависимости от числа итераций N

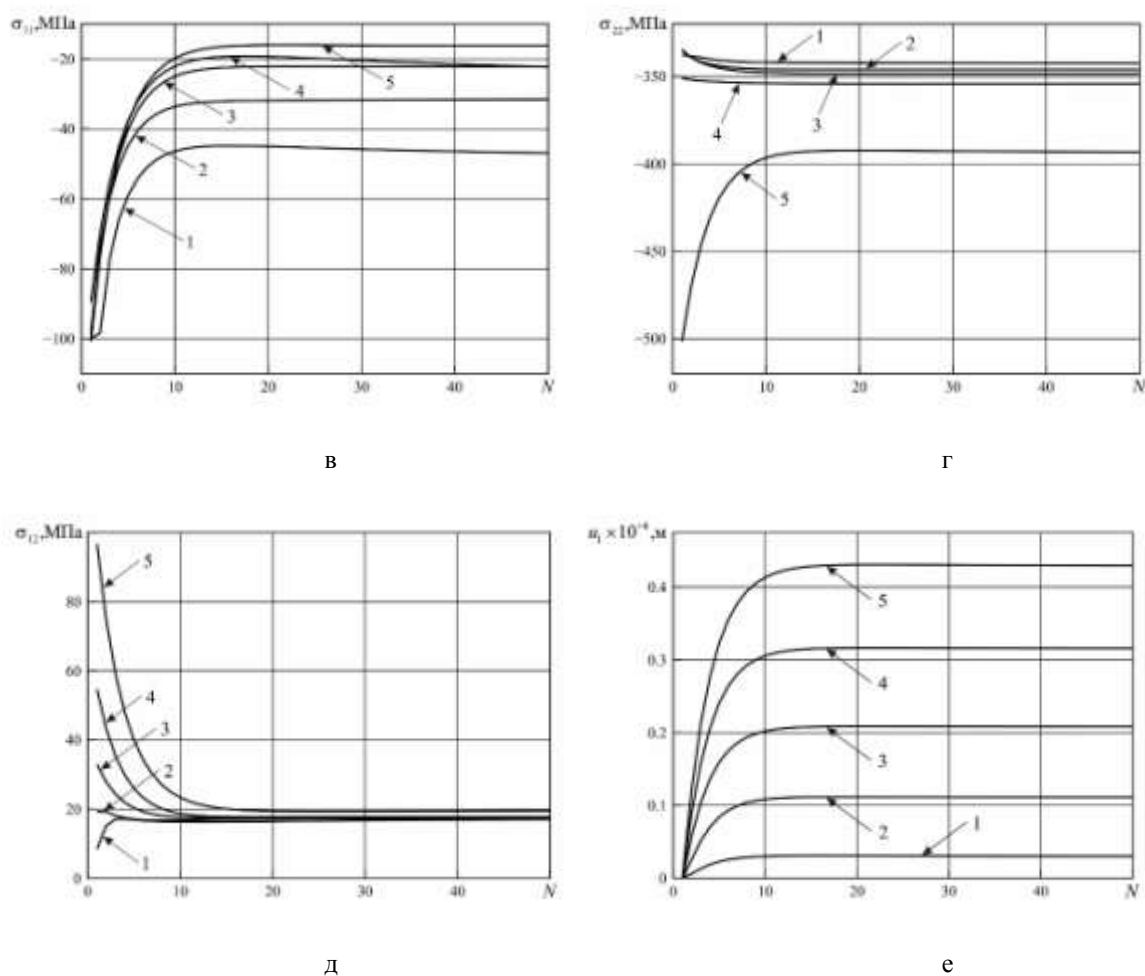


Рис. 10. Изменения значений компонент тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ и компоненты u_1 вектора перемещения \mathbf{u} контактных узлов в зависимости от числа итераций N

Из графиков на рис. 9 – 10 видно, что использование соотношения (11) для коррекции касательных сил, учитывающих эффект трения в контактных узлах конечно-элементной модели, позволяет получить устойчивое сходящееся решение задачи теории упругости с непрерывным односторонним контактом.

Заключение

Разработан алгоритм решения задач контактной теории упругости с выраженным непрерывным односторонним контактом. Предложен итерационный алгоритм коррекции касательных сил, учитывающих процесс трения при взаимодействии, и создан комплекс прикладных программ. Выполненные численные исследования непрерывного одностороннего контактного взаимодействия упругой пластинки и абсолютно жесткого полупространства показали достаточно высокую эффективность разработанного алгоритма и, реализующего его, программного кода.

Работа выполнена при поддержке гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-1432.2014.8.

Список литературы

1. Станкевич И. В. Математическое моделирование задач теории упругости с односторонним дискретным контактом // Математика и математическое моделирование. 2015. № 04. <http://mathmjournal.ru/doc/801840.html>. DOI: 10.7463/mathm.0415.0801840.
2. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. – М.: Машиностроение, 2005. – 352 с.
3. Галин Л.А. Развитие теории контактных задач М.: Наука, 1976. –494.
4. Котович А.В., Станкевич И.В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 106 с.
5. Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И. Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование термоупругопластического контактного взаимодействия системы тел // Mathematica Montisnigri, 2014. - Т. 30 . - С. 99 – 114.
6. Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". Спецвыпуск: Прикладная математика, 2011 г. – С. 134 – 141.
7. Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. 2013. №1. С. 75–81.
8. Silveira R.A., Gonçalves P.B. Analysis of slender structural elements under unilateral contact constraints. Structural Engineering and Mechanics, 2001, v. 12, no. 1, pp.1–16.

9. Elabbasi N., Hong J.W., Bathe K.J.R. On the reliable solution of contact problems in engineering design. *Int. J. of Mechanics and Materials in Design*, 2004, no 1, pp. 3–16.
10. Fernandez J.R., Sofonea M. Variational and numerical analysis of the signorini's contact problem in viscoplasticity with damage. *Journal of Applied Mathematics*, 2003, no 2, pp. 87–114.

Mathematical Modeling of Contact Problems of Elasticity Theory with Continuous Unilateral Contact

I.V. Stankevich^{1,*}

* aplmex@yandex.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: discrete contact interaction; a contact problem of elasticity theory; finite element method

The work [1] presents the formulation and numerical solution of the problem concerning the unilateral discrete contact interaction of an elastic body and a rigid half-space. However, many parts and components of engineering structures have a pronounced continuous contact within a given surface [2, 3]. In this paper we consider a special case of this option of contact interaction when, the elastic body of finite size, subjected to external forces, is based on a rigid half-space. Contact occurs through a dedicated contact surface, which in general can change their sizes.

Developed to solve this problem, a numerical algorithm is a further adaptation and development of the approaches described in [1]. The paper shows results of solving the model problem of the elasticity theory with and without taking friction into account. In the latter case, were additionally obtained numerical data characterizing the convergence of the solution

References

1. Stankevich I. V., Mathematical modeling of problems of elasticity with unilateral discrete contact. Matematika i matematicheskoe modelirovanie MGTU im. N.E. Baumana =Mathematics and mathematical modeling of the Bauman MSTU, 2015, no. 04. DOI: [10.7463/mathm.0415.0801840](https://doi.org/10.7463/mathm.0415.0801840) (in Russian).
2. Zarubin V. S., Stankevich I. V. Rachet teplonapryazheniykh konstruktsiy [Calculation of heat-stressed structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p.
3. Galin, L. A. Razvitie teorii kontaktnykh zadach [Development of the theory of contact problems]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 494 p.
4. Kotovich, A. V., Stankevich I. V. Reshenie zadach teorii uprugosti metodom konechnykh elementov [Solution of elasticity problems by the finite element method]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012. 106 p.

5. Galanin M. P., Krupkin A. V., Kuznetsov V. I. Lukin V. V., Novikov V. V., Rodin A. S., Stankevich I. V. Mathematical modeling thermoplastische contact interaction of a system of bodies. *Mathematica Montisnigri*, 2014, vol. 30, pp. 99–114.
6. Stankevich I. V., Yakovlev, M. E., Si Tu Htet. Development of contact interaction algorithm based on the alternating Schwarz method. *Vestnik Bauman MSTU. Series "Natural Sciences"*. Special issue: Applied mathematics, 2011, pp. 134–141(in Russian).
7. Lukashevich A.A., Rozin L.A. On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis. *Magazine of Civil Engineering*, 2013, no. 1, pp. 75–81 (in Russian).
8. Silveira R.A., Gonçalves P.B. Analysis of slender structural elements under unilateral contact constraints. *Structural Engineering and Mechanics*, 2001, vol. 12, no. 1, pp.1–16.
9. Elabbasi N., Hong J.W., Bathe K.J.R. On the reliable solution of contact problems in engineering design. *Int. J. of Mechanics and Materials in Design*, 2004, no 1, pp. 3–16.
10. Fernandez J.R., Sofonea M. Variational and numerical analysis of the signorini's contact problem in viscoplasticity with damage. *Journal of Applied Mathematics*, 2003, no 2, pp. 87–114.